Sayısal analizin amacı; matematiksel olarak ifade edilmiş problemlerin çözümüne, belli sayıda ve sıralı aritmatik işlemleri bilgisayar programları ile yaparak, sonuca istenilen hassasiyetle ulaşılmasıdır. Genellikle analitik olarak çözümleri çok zor veya imkansız olan problemleri, belirli hata oranında çözmek için kullanılır.

MATRİSLER

Determinant : Bir matrisin gerçek değerine determinant denir.

$$A=[a] \Rightarrow \det A = |A| = a$$

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = a \cdot d - b \cdot c$$

Sarrus Kuralı;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow detA = ?$$

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

- - - + + +

$$detA = |A| = \left(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}\right) - \left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}\right)$$

2. yol : Determinantı hesaplanacak matrisin asal köşegen altında kalan elemanlar, elementer satır işlemleri yapılarak sıfırlanır. Asal köşegen elemanlarının çarpımı determinantı verir.

Bir matrise uygulanabilecek elementer işlemler;

1. Herhangibir satır veya sütun sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılabilir.
2. İki satır veya sütun karşılıklı yer değiştirebilir.
3. Herhangibir satır başka bir satır yada herhangibir sütun başka bir sütunla toplanabilir.

Örnek :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow detA=?$$

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2\end{array}\right]$$

$$detA=|A|=\left(1\cdot 1\cdot 2+0\cdot 4\cdot(-1)+1\cdot 1\cdot 1\right)-\left(0\cdot 1\cdot 1+1\cdot 4\cdot 2+1\cdot 1\cdot(-1)\right)$$
$$=(2+0+1)-(0+8-1)=3-7=-4$$

2. yol;

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{sat2=sat1\cdot(-1)+sat2=} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{sat3=sat1\ +sat3=} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{sat3=sat2\cdot(-2)+sat3=} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix} \Rightarrow detA=-4\cdot 1\cdot 1=-4$$

Matris Tersi : Bir matrisin tersinin olabilmesi için determinantının sıfırdan farklı olması gerekir.

Ek (adjoint) matris ile matris tersi bulma;

Cofaktör : Kare A matrisinin a_{ij} elemanının kofaktörü

C_{ij} = $(-1)^{i+j}$ M_{ij} formülü ile hesaplanır. Burada M_{ij} ‘ye A matrisinin minörü denir ve A matrisinin i satırı ile j sütununun iptal edilmesi ile oluşan matrisin determinantıdır.

A matrisinin tersi;

$$adj\ (A)=cofaktor(A)^{T}$$
$$A^{-1}=\frac{adj\ (A)}{A}$$

2. yol : A matrisinin yanına aynı boyutlu birim matris yazılır. Elementer satır işlemleri her iki matrisede uygulanarak A matrisi birim matris haline dönüştürülür. Birim matrisin yerinde oluşan matris A matrisinin tersidir.

Örnek :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 3\\ 5 & 4 & -2\end{bmatrix}$$ matrisinin tersini bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 3 & 1\\ -2 & -4 & 3 & -2 & -4\\ 5 & 4 & -2 & 5 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow detA=(0+15+24)-(4+36+0)=-1$$

$$cof\,(A)=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}M_{11} & (-1)^{1+2}M_{12} & (-1)^{1+3}M_{13}\\ (-1)^{2+1}M_{21} & (-1)^{2+2}M_{22} & (-1)^{2+3}M_{23}\\ (-1)^{3+1}M_{31} & (-1)^{3+2}M_{32} & (-1)^{3+3}M_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 5 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & -4\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$cof\,(A)=\begin{vmatrix}-4 & 11 & 12\\ 2 & -6 & -7\\ 3 & -9 & 10\end{vmatrix}\Rightarrow cof(A)^T=\begin{vmatrix}-4 & 2 & 3\\ 11 & -6 & -9\\ 12 & -7 & -10\end{vmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{cof(A)^T}{detA}=\frac{\begin{vmatrix}-4 & 2 & 3\\ 11 & -6 & -9\\ 12 & -7 & -10\end{vmatrix}}{-1}=\begin{vmatrix}4 & -2 & -3\\ -11 & 6 & 9\\ -12 & 7 & 10\end{vmatrix}$$

2. yol ;

$$A=\left[\begin{array}{ccc:ccc}3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]=$$

Komplex Elemanlı Matrisler

En az bir komplex terim içeren matrise komplex matris denir. Programlama dillerinde komplex terim tanımlanamadığı için, bu terimleri içeren matrisler için bazı yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerde sadece reel sayılar kullanılarak komplex matrislerle ilgili işlemler yaptırılabilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} + jb_{11} & a_{12} + jb_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} + jb_{1n} \\ a_{21} + jb_{21} & a_{22} + jb_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} + jb_{2n} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ a_{m1} + jb_{m1} & a_{m2} + jb_{m2} & \cdot\cdot & a_{mn} + jb_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[a] = Reel\,(A)$$
$$[b] = Im\,(A)$$
$$[A] = [a] + j\,[b]$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} c_{11} + jd_{11} & c_{12} + jd_{12} & \cdot\cdot & c_{1n} + jd_{1n} \\ c_{21} + jd_{21} & c_{22} + jd_{22} & \cdot\cdot & c_{2n} + db_{2n} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ c_{m1} + jd_{m1} & c_{m2} + jd_{m2} & \cdot\cdot & c_{mn} + jd_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{Reel}\,(\boldsymbol{B})$$
$$[\boldsymbol{d}] = \boldsymbol{Im}\,(\boldsymbol{B})$$
$$[\boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{c}] + \boldsymbol{j}\,[\boldsymbol{d}]$$

Toplama ve çıkarma

$$[C] = [e] + j\,[f] \text{ olmak üzere}$$
$$[C] = [A] + [B] = \big([a] + [c]\big) + j\,\big([b] + [d]\big) = [e] + j\,[f]$$

Çarpma

$$[C] = [e] + j\,[f] \text{ olmak üzere}$$
$$[C] = [A]\cdot[B] = \big([a] + j\,[b]\big)\cdot\big([c] + j\,[d]\big) = [a]\cdot[c] + j\,[a]\cdot[d] + j\,[b]\cdot[c] + j^2\,[b]\cdot[d]$$
$$[e] = [a]\cdot[c] - [b]\cdot[d]$$
$$[f] = [a]\cdot[d] - [b]\cdot[c]$$

Yazılan programlarda bu iki matris ayrı ayrı hesaplanır.

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1 + j & 2 - j5 \\ 3 & 2 + j \end{bmatrix} \quad , \; B = \begin{bmatrix} 1 + j \\ 2 - j \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; C = A \cdot B = ?$$

Genelleştirilmiş Matris Yöntemi

Herhangibir matrisin genelleştirilmiş formatta yazılması için aşağıdaki form kullanılır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} + jb_{11} & a_{12} + jb_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} + jb_{1n} \\ a_{21} + jb_{21} & a_{22} + jb_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} + jb_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} + jb_{m1} & a_{m2} + jb_{m2} & \cdot\cdot & a_{mn} + jb_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} [a] = Reel\,(A) \\ [b] = Im\,(A) \\ [A] = [a] + j\,[b] \end{array} \right\} [A]_G = \begin{bmatrix} [a] & -[b] \\ [b] & [a] \end{bmatrix}$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1+j & 2-j \\ 3 & j \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A_G = ?$$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A]_G = \begin{bmatrix} [a] & -[b] \\ [b] & [a] \end{bmatrix}, [B]_G = \begin{bmatrix} [c] & -[d] \\ [d] & [c] \end{bmatrix}, [C]_G = \begin{bmatrix} [e] & -[f] \\ [f] & [e] \end{bmatrix}$$

Olmak üzere;

Toplama ve Çıkarma

$$[C]_G = [A]_G + [B]_G = \begin{bmatrix} [a] & -[b] \\ [b] & [a] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [c] & -[d] \\ [d] & [c] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a]+[c] & -[b]-[d] \\ [b]+[d] & [a]+[c] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e] & -[f] \\ [f] & [e] \end{bmatrix}$$

$$C = [e] + j\,[f]$$

Çarpma

$$[C]_G = [A]_G \cdot [B]_G = \begin{bmatrix} [a] & -[b] \\ [b] & [a] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [c] & -[d] \\ [d] & [c] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a]\cdot[c]-[b]\cdot[d] & -[a]\cdot[d]-[b]\cdot[c] \\ [b]\cdot[c]+[a]\cdot[d] & -[b]\cdot[d]+[a]\cdot[c] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e] & -[f] \\ [f] & [e] \end{bmatrix}$$

$$C = [e] + j\,[f]$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1+j & 2-j5 \\ 3 & 2+j \end{bmatrix} \quad , \; B = \begin{bmatrix} 1+j \\ 2-j \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; C = A \cdot B = ?$$

Matris Tersi

$$[A]_G = \begin{bmatrix} [a] & -[b] \\ [b] & [a] \end{bmatrix} \; \textit{için herhangibir yöntemle} \, [A]_G^{-1} \; \textit{bulunur,}$$

$$[A]_G^{-1} = \begin{bmatrix} [g] & -[h] \\ [h] & [g] \end{bmatrix} \Rightarrow [A]^{-1} = [g] + j\,[h]$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1+j & 1-j \\ 1 & j \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; A^{-1} = ?$$