Bayağı Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü

Fiziksel problemlerin ifade edilmesinde (modellenmesinde) ve çözülmesinde kullanılır. Yay-kütle sistemi, kondansatör-bobin içeren elektronik devreleri, kimyasal reoksiyonlar, bir kütlenin bir başka cismin etrafındaki hareketi problemleri diferansiyel denklem formundadır.

Herhangibir değişkene (veya değişken grubuna) bağlı bilinmeyen bir fonksiyon (yada fonksiyonlar) ile bu fonksiyonun türevleri arasındaki bağıntıya adi diferansiyel denklem (yada sistem) denir. Tek denklem halinde en yüksek mertebeli türev, denklemin mertebesini belirler; denklem sistemi halinde ise en yüksek mertebeli denklemin mertebesi sistemin mertebesi olarak kabul edilir.

Adi türevli bir çok diferansiyel denklemin analitik çözümleri olmasına rağmen, bunların çözümleri ya çok zor ya da imkansızdır. Bu yüzden, sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

Eğer diferansiyel eşitlik n. Mertebeden türeve sahip ise bu durumda bu eşitliğen. Mertebeden diferansiyel eşitlik denir.

Diferansiyel denklemler katsayılarına , mertebe ve derecelerine göre sınıflandırıabilir.

1- Katsayılarına Göre Sınıflandırma

$$K_1 \frac{dy}{dx} + K_2 y = f(x)$$

Formunda bir diferansiyel denklem için;

a- K_1 ve K_2 katsayıları sabit ise; ($K_1=15$, $K_2=-4$, $f(x)=100 \sin(\omega x)$) **Sabit** Katsayılı Diferansiyel Denklem veya **Sabit** katsayılı lineer diferansiyel denir.

$$15\frac{dy}{dx} - 4y = 100Sin(\omega x)$$

b- K_1 ve K_2 katsayıları x' in fonksiyonu ise; ($K_1=5x$, $K_2=-4x$, $f(x)=100 \sin(\omega x)$) **Değişken** Katsayılı Diferansiyel Denklem veya **Değişken** katsayılı lineer diferansiyel denir.

$$5x\frac{dy}{dx} - 4xy = 100Sin(\omega x)$$

c- K_1 ve K_2 katsayıları y' in fonksiyonu ise; ($K_1=(3+5y)$, $K_2=-4$, $f(x)=100 \sin(\omega x)$) **Doğrusal olmayan (non-lineer)** Diferansiyel Denklem denir.

$$(3+5y)\frac{dy}{dx} - 4y = 100Sin(\omega x)$$

2- Mertebe ve Derecelerine Göre Sınıflandırma

Bir diferansiyel eşitik içerisinde m,n en büyük olmak kaydı ile ;

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^n$$

İfadesinde m eşitliğin mertebesini ve n ise eşitliğin derecsini verir. m.mertebeden ve n.dereceden dif. Eşitlik denir.

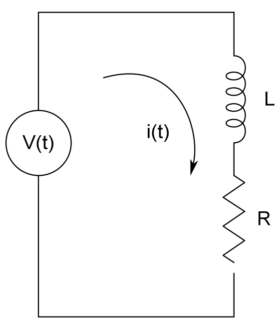
Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

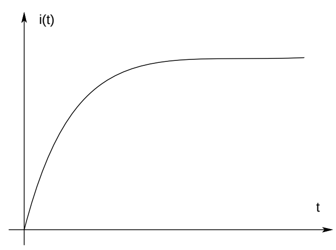
Elektrik devrelerinde, elektrik makinalarının dinamik analizinde ve elektromekanik sistemerin tasarımı, modellenmesi ve analizinde ve diğer tüm elektrik mühendisliği konuları kapamında diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerin çözülmesi ile mevcut sistemin davranışı belirlenebilmektedir.

Diferansiyel denklemlerin çözümü için 2 yaklaşımı mevcuttur. Bunlardan ilki analitik çözüm, diğeri ise sayısal çözümdür. Analitik çözüm Diferansiyel Denklemler dersinde ayrıntılı olarak işlenmiştir. Burada tekrar edilmeyecektir. Bu ders kapsamında sayısal çözüm yöntemlerine değinilecektir. 2 yaklaşım arasındaki fark öğrenci tarafından kolaylıkla anlaşılabilecektir.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

formunda ki diferansiyel eşitliğe 1. Dereceden tek değişkenli adi diferansiyel denklem denir. En basit formda bir diff. Denklem şekildeki RL devresinden türetilebilir.





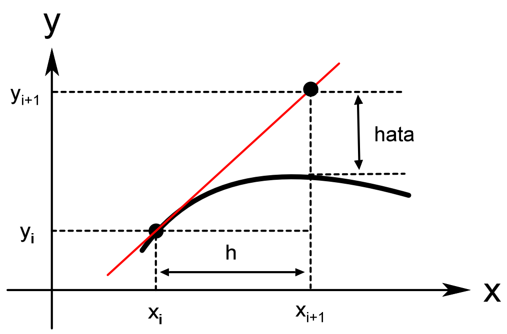
$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V(t)}{L} - \frac{R}{L} i(t)$$

1- EULER YÖNTEMİ

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için geliştirilen yöntemlerin başında gelir. Basit olmasına rağmen oldukça başarılı sonuçlar vermektedir. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ olan bir diff. denklem için;

Eğer x_i noktasında y_i biliniyorsa ; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \cong \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$



Olarak yazılabilir.Her iki eşitlik ten $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$ olarak yazılır ve buradan y_{i+1} çözülür ise ;

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ yazılabilir. Böylece (x_i, y_i) başlangıç noktası kullanılarak (x_{i+1}, y_{i+1}) noktası buluınmuış olur. Bu şekilde nokta nokta çözüm yapılarak diferansiyel eşitlik çözülmüş olur. Çözüme başlamak için muhakkak başlangıç noktası x_0, y_0 bilinmeli ve h adımı belirlenmelidir. Çözüm sonunda bir tablo oluşturulur. Oluşturulan tablo çizdirilerek çözüm değişimi görülebilir.

Not : Aynı ifade taylor serisi yardımı ile bulunabilir.

$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ Diferansiyel denkleminin çözümü $y=y(x)$ olsun,

$x=x_0$ için $y(x_0)= y_0$ verildiğine göre

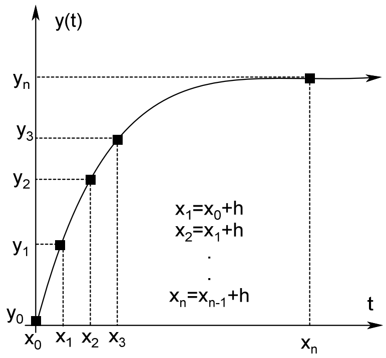
($y'(x_0)=f(x_0,y_0)$ ki terim kullanılırsa;

$$y(x_0+h) = y_0 + h\,y'(x_0) = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

genellestirilirse;

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
.	.
.	.
x_n	y_n

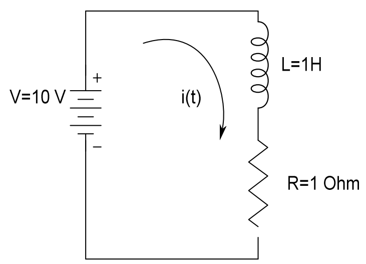


Burada sadece x_3 için y_3 bulmak gerekse bile sırası ile y_1 ve y_2 öncelikle bulunmalıdır. Dorudan y_3 hesaplanamaz.

ÖRN-1: . $\frac{dy}{dx} = 2x$ y(0)=1 ise y(2)=? (h=0.5)

ÖRN-2: . $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ y(4)=0.75 ise y(7)=? (h=1)

ÖRN -3 : Devreden i(t) akımının değişimini ***EULER*** yöntemi ile bulunuz. Analitik yöntem ile karşılaştırınız. $t_0=0$ iken $I_0=0$ ve h= 0.1 olarak alıp kullanınız.



2- Runge-Kutta Yöntemi

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ formunda bir diff. eşitlğin çözümü Euler yöntemine benzer, tüm sayısal yöntenler gibi bu yöntemde de bir başangıç koşulu ile durum değişkeninin adım adım hesabına dayanır. Her adımda x_i değişkeni h kadar artırılıp x_{i+1} için y_{i+1} değeri hesaplanır. Runge-Kutta yönteminde y_{i+1} hesabı için birkaç adım işlem yapılır. Genel denklemi ;

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ olan bir diff. Denklem için;

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad ise$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta k_1,k_2,k_3 ve k_4 hesabı içinde değişkenlerin birine h' li terim diğerine ise k'lı terimler eklenmektedir.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad ise$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

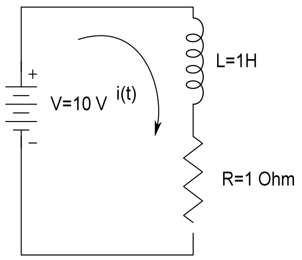
$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

ÖRN 4: . $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ y(4)=0.75 ise y(7)=? (h=1)

ÖRN 5: Devreden i(t) akımının değişimini Runge-Kutta yöntemi ile bulunuz. Analitik yöntem ve **EULER** ile karşılaştırınız. $t_0=0$ iken $I_0=0$ ve $h= 0.1$ olarak alıp kullanınız.



3- ADAMS Yöntemi

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ formunda bir diff. eşitliğin çözümü için birden fazla başlangıç koşuluna gerek vardır. Kullanılan nokta sayısı ile orantılı olarak 2 adımlı, 3 adımlı, 4 adımlı gibi farklı yapıları mevcuttur. Nokta sayısı arttıkça gerekli başlangıç değeri sayısı da artmaktadır.

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ olan bir diff. Denklem için;

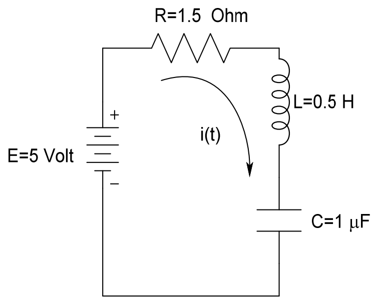
2 adımlı	$y_{i+2} = y_{i+1} + \frac{h}{2}(3f_{i+1} - f_i)$	f_{i+1}, f_i gereklidir. Yani $f(x_{i+1}, y_{i+1}), f(x_i, y_i)$ gereklidir.
	İlk hesaplanacak değer $y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0)$	f_0, f_1 $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1)$
3 adımlı	$y_{i+3} = y_{i+2} + \frac{h}{12}(23f_{i+2} - 16f_{i+1} + 5f_i)$	f_{i+2}, f_{i+1}, f_i gereklidir. Yani $f(x_{i+2}, y_{i+2}), f(x_{i+1}, y_{i+1}), f(x_i, y_i)$
	İlk hesaplanacak değer $y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0)$	f_0, f_1, f_2 $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)$

ÖRN-6: . $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ y(4)=0.75 ise y(7)=? (h=1)

ÖRN 7: Devreden i(t) akımının ve Vc(t) kondansatör geriliminin değişimini ;

a- EULER
b- RUNGE-KUTTA
c- ADAMS Yöntemleri ile 2 adım bulunuz.

$t_0=0$ iken $I_0=0$ ve h= 0.1 olarak alıp kullanınız. Adams yönteminde 2. Başlangıç değerleri olarak **EULER** ile bulunan değerleri kullanınız.



ÖDEV : Devreden i(t) akımının değişimini tüm yöntemler ile 3 adım bulunuzRunge-Kutta yöntemi ile bulunuz. Analitik yöntem ile karşılaştırınız. $t_0=0$ iken $I_0=0$ ve h= 0.1 olarak alıp kullanınız. Adams yönteminde 2. Başlangıç değerleri olarak **EULER** ile bulunan değerleri kullanınız.