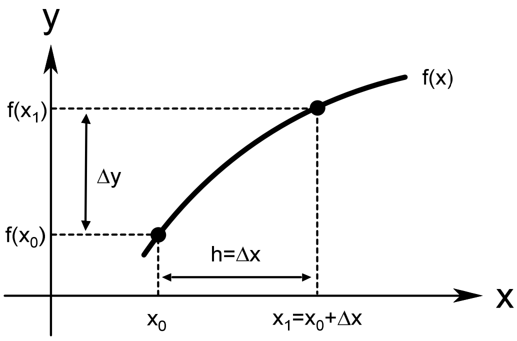
SAYISAL TÜREV



Tanım : x_0 değerine pozitif veya negatif yönde verilen Δx (h) artımına karşılık f(x) fonksiyonundaki değişim Δy ise ve,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

limiti varsa, bu limite f(x) fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir.

Aynı zamanda $f'(x_0)$, x_0 noktasında fonksiyona teğet geçen eğrinin eğimidir.

Türev herhangibir büyüklükteki değişim miktarıdır.

Örneğin, yoldaki değişim miktarı hızı, hızdaki değişim miktarı ivmeyi verir.

x(t) yol, v(t) hız, a(t) ivme fonksiyonu olmak üzere;

$$v(t)=x'(t)=\frac{d\,x(t)}{dt}$$
$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Bobin ve kondansatör uç denklemleri;

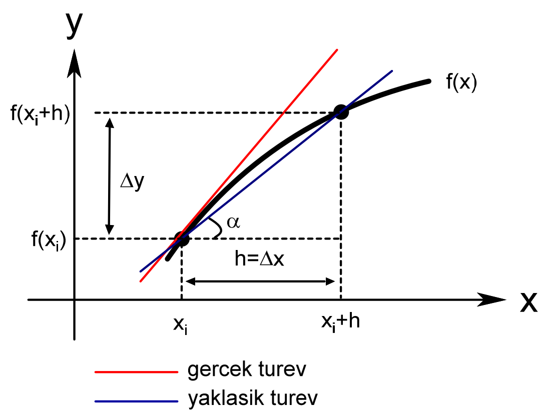
$$V_L=L\cdot\frac{d\,i_L}{dt}$$
$$i_C=C\cdot\frac{dV_C}{dt}$$

Açısal hızın zamana göre türevi konumdur;

$$\theta_r=\frac{d\omega_r}{dt}$$

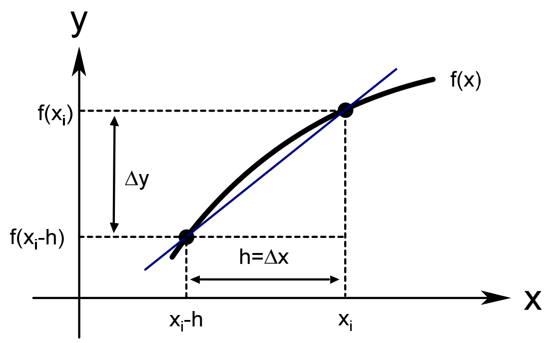
Sayısal türev hesabında gerçek teğet denklemi yerine, belli noktalardan geçen doğru denklemi (yaklaşık teğet denklemi) kullanılır.

1. İleri (sağ) Farklarla Sayısal Türev



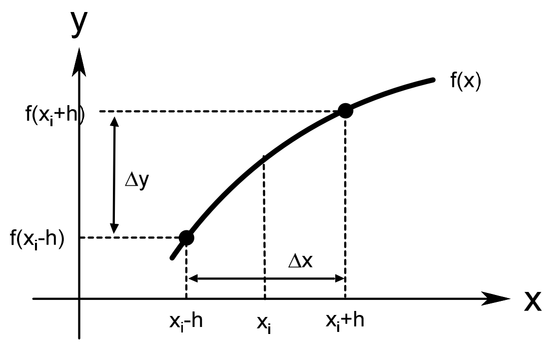
$$\Delta y = f(x_i + h) - f(x_i)$$
$$\Delta x = x_i + h - x_i = h$$
$$\tan(\alpha) = f'(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

2. Geri (sol) Farklarla Sayısal Türev



$$\Delta y = f(x_i) - f(x_i - h)$$
$$\Delta x = x_i - (x_i - h) = h$$
$$f'(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

3. Merkez Farklarla Sayısal Türev



$$\Delta y = f(x_i + h) - f(x_i - h)$$
$$\Delta x = (x_i + h) - (x_i - h) = 2h$$
$$f'(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

Örnek :

$y = x^2$ fonksiyonunun x=2 noktasındaki türevini h=0.1 alarak yaklaşık olarak bulunuz.

Taylor Serileri

Taylor serileri sayısal yöntemlerde fonksiyonları yaklaşık olarak bir polinomla ifade etmek için kullanılır.

Bir fonksiyonun herhangibir noktadaki değerinin, fonksiyonun ve türevlerinin bir başka noktadaki değerleri cinsinden tahmin edilebilmesini sağlar.

Herhangibir f(x) fonksiyonu ve türevi $[x_i , x_{i+1}]$ aralığında sürekli ise taylor serisi;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}\cdot(x_{i+1}-x_i)^1 + \frac{f''(x_i)}{2!}\cdot(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}\cdot(x_{i+1}-x_i)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_i)}{n!}\cdot(x_{i+1}-x_i)^n + R_n$$

Burada;

$x_{i+1} = x_i + h$

$x_{i+1} - x_i = h$

R_n : Kalan

Ayrıca

$f(x_i)=f_i$, $f(x_{i+1})=f_{i+1}$, ... olarak gösterilebilir.

$$f_{i+1} = f_i + \frac{f'_i}{1!}\cdot h + \frac{f''_i}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''_i}{3!}\cdot h^3 + \cdots + \frac{f^n_i}{n!}\cdot h^n + R_n$$

Taylor Serileri ile Sayısal Türev Hesabı

1. 2 noktalı ileri fark Taylor Serileri ile 1. Türev hesabı

(x_{i+1} , f_{i+1}) ve (x_{i+2} , f_{i+2}) değerleri biliniyorsa f'(x_i) = ?

$$f_{i+1} = f_i + \frac{f'_i}{1!} \cdot h + \frac{f''_i}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''_i}{3!} \cdot h^3 + \cdots + \frac{f_i^n}{n!} \cdot h^n + R_n$$

$$\left(x_{i+1}, f_{i+1}\right) \rightarrow f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f\left(x_i + h\right) = f_i + \frac{f'_i}{1!} \cdot h + \frac{f''_i}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''_i}{3!} \cdot h^3 + \cdots + \frac{f_i^n}{n!} \cdot h^n + R_n$$

$$\left(x_{i+2}, f_{i+2}\right) \rightarrow f_{i+2} = f(x_{i+2}) = f\left(x_i + 2h\right) = f_i + \frac{f'_i}{1!} \cdot (2h) + \frac{f''_i}{2!} \cdot (2h)^2 + \frac{f'''_i}{3!} \cdot (2h)^3 + \cdots + \frac{f_i^n}{n!} \cdot (2h)^n + R_n$$

x_i noktasındaki 1. Türevin hesaplanması için 2. Türevli terimlere kadar olan kısımların alınmasıyla;

$$\left(x_{i+1}, f_{i+1}\right) \rightarrow f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2} f''_i$$

$$\left(x_{i+2}, f_{i+2}\right) \rightarrow f_{i+2} = f_i + 2h f'_i + 2h^2 f''_i$$ 1. Denklem (-4) ile çarpıp 2. Denklemle toplanırsa;

+____________________

$$f_{i+2} - 4 f_{i+1} = -3 f_i - 2h f'_i \rightarrow f'_i = \frac{1}{2h}\left[-3 f_i - f_{i+2} + 4 f_{i+1}\right]$$

2. 2 noktalı geri fark Taylor Serileri ile 1. Türev hesabı

(x_{i-1}, f_{i-1}) ve (x_{i-2}, f_{i-2}) değerleri biliniyorsa $f'(x_i) = ?$

$$f_{i+1} = f_i + \frac{f'_i}{1!}\cdot h + \frac{f''_i}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''_i}{3!}\cdot h^3 + \cdots + \frac{f_i^n}{n!}\cdot h^n + R_n$$

$$\left(x_{i-1}, f_{i-1}\right) \rightarrow f_{i-1} = f(x_{i-1}) = f\left(x_i - h\right) = f_i + \frac{f'_i}{1!}\cdot(-h) + \frac{f''_i}{2!}\cdot(-h)^2$$

$$\left(x_{i-2}, f_{i-2}\right) \rightarrow f_{i-2} = f(x_{i-2}) = f\left(x_i - 2h\right) = f_i + \frac{f'_i}{1!}\cdot(-2h) + \frac{f''_i}{2!}\cdot(-2h)^2$$

$$\left(x_{i-1}, f_{i-1}\right) \rightarrow f_{i-1} = f_i - h f'_i + \frac{h^2}{2} f''_i$$

$$\left(x_{i-2}, f_{i-2}\right) \rightarrow f_{i-2} = f_i - 2h f'_i + 2h^2 f''_i$$ 1. Denklem (-4) ile çarpıp 2. Denklemle toplanırsa;

+ ____________________

$$f_{i-2} - 4 f_{i-1} = -3 f_i + 2h f'_i \rightarrow f'_i = \frac{1}{2h}\left[f_{i-2} - 4 f_{i-1} + 3 f_i\right]$$

3. 2 noktalı ileri fark Taylor Serileri ile 2. Türev hesabı

$(x_{i+1}, f_{i+1}) \rightarrow f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i$

$(x_{i+2}, f_{i+2}) \rightarrow f_{i+2} = f_i + 2hf'_i + 2h^2 f''_i$ 1. Denklem (-2) ile çarpıp 2. Denklemle toplanırsa;

$+$____________________

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + h^2 f''_i \rightarrow f''_i = \frac{1}{h^2}\left[f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\right]$$

4. 2 noktalı geri fark Taylor Serileri ile 2. Türev hesabı

$(x_{i-1}, f_{i-1}) \rightarrow f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i$

$(x_{i-2}, f_{i-2}) \rightarrow f_{i-2} = f_i - 2hf'_i + 2h^2 f''_i$ 1. Denklem (-2) ile çarpıp 2. Denklemle toplanırsa;

$+$____________________

$$f_{i-2} - 2f_{i-1} = -f_i + h^2 f''_i \rightarrow f''_i = \frac{1}{h^2}\left[f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i\right]$$

Örnek :

$y = x^2$ fonksiyonunun x=2 noktasındaki, 1. ve 2. türevini h=0.1 alarak, 2 noktalı ileri fark Taylor Serileri yaklaşık olarak bulunuz.

5. 3 noktalı ileri fark Taylor Serileri ile 1. Türev hesabı

(x_{i+1} , f_{i+1}) , (x_{i+2} , f_{i+2}) ve (x_{i+2} , f_{i+3}) değerleri biliniyorsa f'(x_i) = ?

$$f_{i+1} = f_i + \frac{f'_i}{1!}\cdot h + \frac{f''_i}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''_i}{3!}\cdot h^3 + \cdots + \frac{f_i^n}{n!}\cdot h^n + R_n$$

$$\left(x_{i+1}, f_{i+1}\right) \rightarrow f_{i+1} = f_i + \frac{f'_i}{1!}\cdot h + \frac{f''_i}{2!}\cdot h^2 \rightarrow f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2} f''_i \qquad (1)$$

$$\left(x_{i+2}, f_{i+2}\right) \rightarrow f_{i+2} = f_i + \frac{f'_i}{1!}\cdot(2h) + \frac{f''_i}{2!}\cdot(2h)^2 \rightarrow f_{i+2} = f_i + 2h f'_i + 2h^2 f''_i \qquad (2)$$

$$\left(x_{i+3}, f_{i+3}\right) \rightarrow f_{i+3} = f_i + \frac{f'_i}{1!}\cdot(3h) + \frac{f''_i}{2!}\cdot(3h)^2 \rightarrow f_{i+3} = f_i + 3h f'_i + \frac{9}{2} h^2 f''_i \qquad (3)$$

18 (1) – 9 (2) + 2 (3) işlemi uygulanırsa;

$$f'_i = \frac{1}{6h}\left[-11\, f_i + 18\, f_{i+1} - 9\, f_{i+2} + 2\, f_{i+3}\right]$$

Nokta sayısının artması ile hassasiyet artar dolayısıyla hata azalır.

Ödev :

3 noktalı ileri fark Taylor Serileri ile 2. Türev formülünü bulunuz.