SAYISAL İNTEGRAL

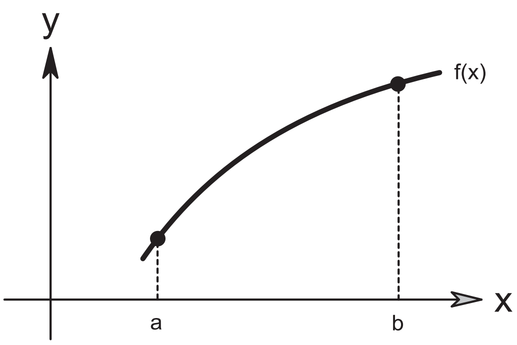
c ϵ R olmak üzere F(x) fonksiyonunun türevi f(x) ise (***F'(x) = f(x)***);

$\int f(x)\cdot dx = F(x)+c$ eşitliğindeki "F(x)+c" ifadesine, f(x) fonksiyonunun belirsiz integrali denir.

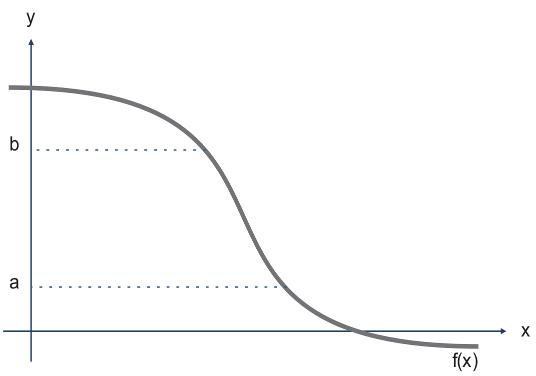
f(x) fonksiyonu [a,b]→R için sürekli ise;

$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ değerine, f(x) fonksiyonunun [a,b] aralığında belirli integrali denir.

Geometrik olarak belirli integral, belirtilen aralıkta, fonksiyon eğrisi ile koordinat ekseni arasındaki kalan alandır.

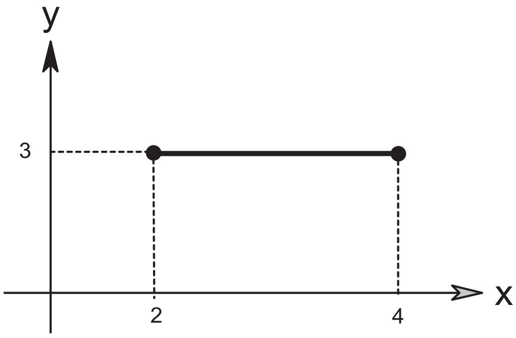


$$Alan = I = \int_a^b f(x)\cdot dx$$



$$Alan = I = \int_a^b f(y)\cdot dy$$

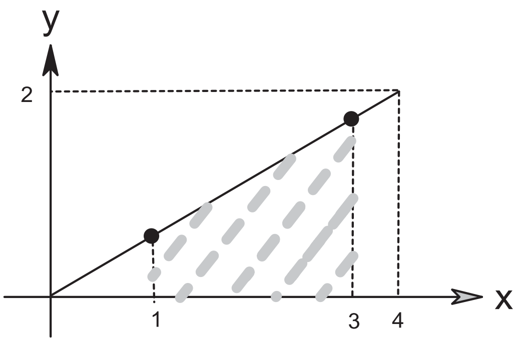
İntegrali kolaylıkla hesaplanabilen eğriler;



Diktörtgen alanı;

$$I = 3 \cdot (4-2) = 6$$

$$Analitik \rightarrow Alan = I = \int_{2}^{3} 3 \cdot dx = 3 \cdot \left(x\Big|_{2}^{4} \right) = 3\,(4-2) = 6$$



Yamuk alanı (f(x)=x/2);

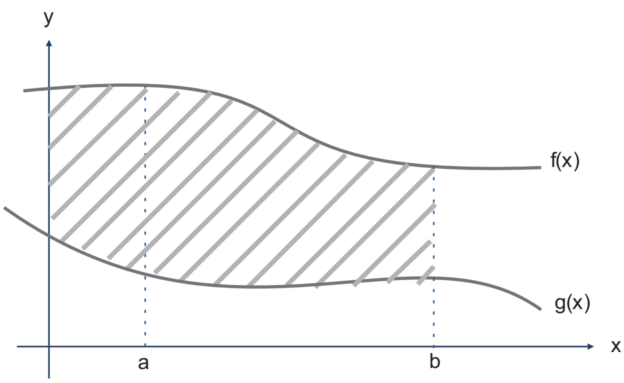
$$I = \frac{f(1)+f(3)}{2} \cdot h = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} \cdot 2 = 2$$

$$Analitik \rightarrow Alan = I = \int_{1}^{3} \frac{x}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2\Big|_{1}^{3} \right) = \frac{1}{4} \cdot (9-1) = 2$$

İntegral Uygulamaları ;

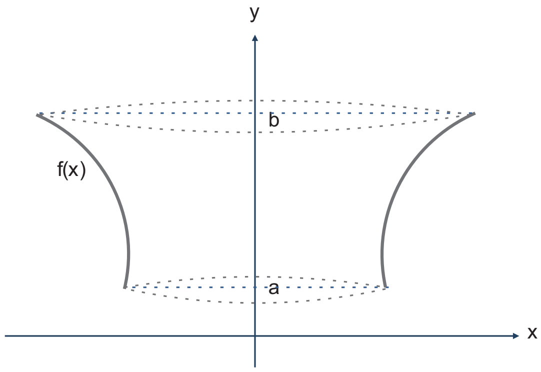
1. Eğri altında kalan alanı bulmak,

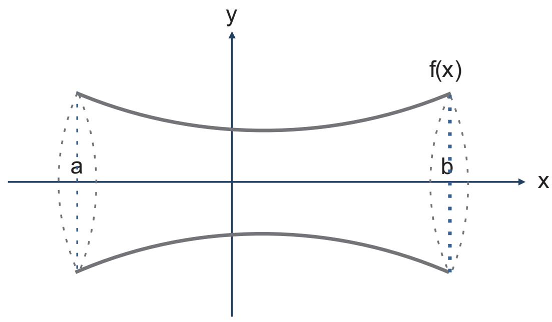
2. İki eğri arasında kalan alanı bulmak,



$$Alan = I = \int_{a}^{b} |f(x) - g(x)| \cdot dx$$

3. Bir eğrinin x veya y ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan kapalı bölgenin hacmini bulmak,

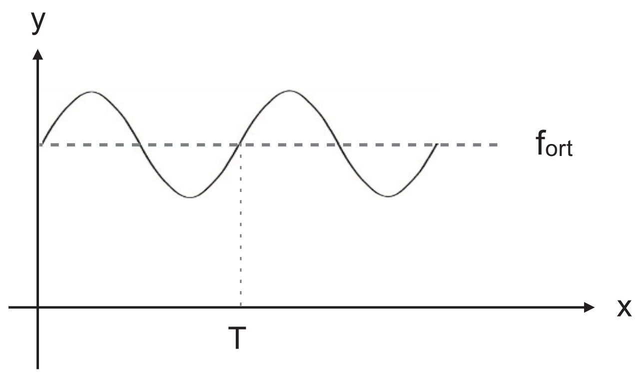




$$Hacim = \pi \int_a^b x^2 \cdot dy \qquad Hacim = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$$

Elektrik Mühendisliğinde kullanılan bazı integral uygulamaları;

1. Ortalama değer hesabı;



$$f_{ort} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot dx$$

2. Etkin değer hesabı;

$$f_{et}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f^2(x) \cdot dx$$

3. Fourier serilerinin hesabında.

Yüksek dereceli polinomlarda veya karmaşık fonksiyonların belirli integrallerinin hesabında, eğri ile koordinat ekseni arasında kalan alanın hesabı zordur. Bu alanlar bilinen geometrik şekillerin alanları kullanılarak, yaklaşık olarak hesaplanabilir. Yani eğri ile koordinat ekseni arasında kalan alan daha küçük ve bilinen geometrik şekillere bölünerek elde edilen alanlar toplanarak hesapalanabilir.

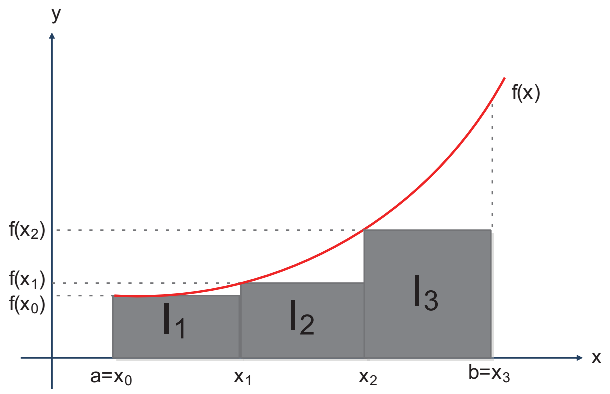
Sayısal Yöntemler;

1. Dikdörtgenler yöntemi

İntegrali bulunacak eğri ilgili aralıkta küçük dikdörtgenlere bölünür, bu dikdörtgenlerin alanları toplanarak yaklaşık sonuç bulunur.

1.a) Sol toplamlar

[a,b] aralığı n parçaya bölünür. Adım $h = \dfrac{b-a}{n}$ ‘dir. $i=0,1,2,..,n-1$ için $x_{i+1}=x_i+h$

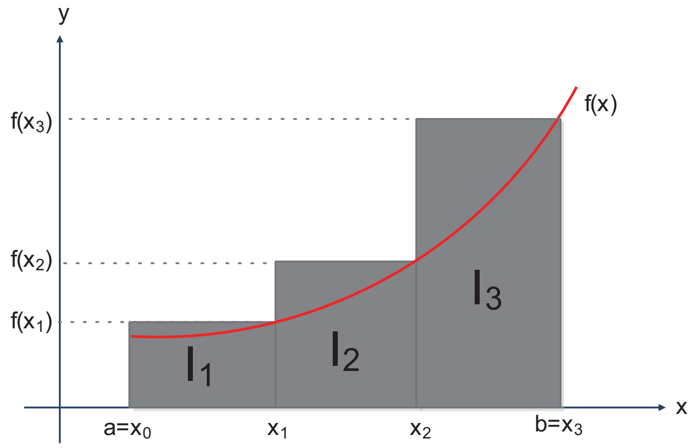


$$I = \int_a^b f(x)\cdot dx = I_1 + I_2 + I_3$$
$$I_1 = f(x_0)\cdot(x_1 - x_0) = h\cdot f(x_0)$$
$$I_2 = f(x_1)\cdot(x_2 - x_1) = h\cdot f(x_1)$$
$$I_3 = f(x_2)\cdot(x_3 - x_2) = h\cdot f(x_2)$$

$$Genel\ hali \rightarrow I = \int_a^b f(x)\cdot dx \cong h\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)\right]$$

1.b) Sağ toplamlar

[a,b] aralığı n parçaya bölünür. Adım $h = \dfrac{b-a}{n}$ ‘dir. $i=1,2,..,n$ için $x_{i+1}=x_i+h$

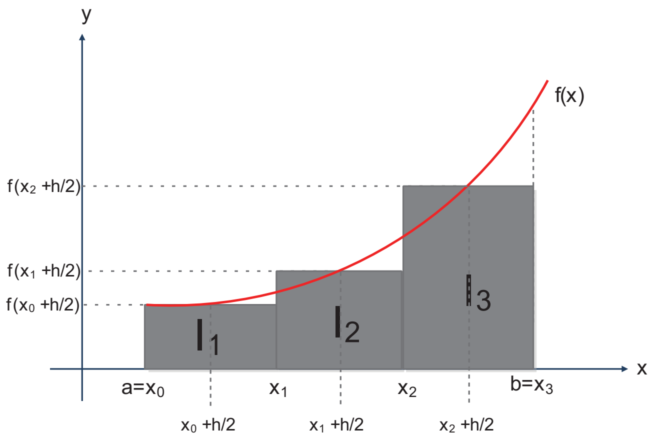


$$I = \int_a^b f(x)\cdot dx = I_1 + I_2 + I_3$$
$$I_1 = f(x_1)\cdot(x_1 - x_0) = h\cdot f(x_1)$$
$$I_2 = f(x_2)\cdot(x_2 - x_1) = h\cdot f(x_2)$$
$$I_3 = f(x_3)\cdot(x_3 - x_2) = h\cdot f(x_3)$$

$$Genel\ hali \rightarrow I = \int_a^b f(x)\cdot dx \cong h\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]$$

1.c) Orta toplamlar

[a,b] aralığı n parçaya bölünür. Adım $h = \dfrac{b-a}{n}$ 'dir. $i=0,1,..,n-1$ için $x_{i+1}=x_i+h$



$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot (x_1 - x_0) = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$I_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) \cdot (x_2 - x_1) = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)$$

$$I_3 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) \cdot (x_3 - x_2) = h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right)$$

$$Genel\ hali \rightarrow I = \int_a^b f(x) \cdot dx \cong h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right]$$

Örnek :

$\int_{1}^{7} 3 \cdot x^2 \cdot dx$ integralini dikdörtgenler yöntemini kullanarak bulunuz. (n=3,5,10)

$$Analitik \rightarrow Alan = I = \int_{1}^{7} 3 \cdot x^2 \cdot dx = \left(x^3 \Big|_1^7 \right) = \left(7^3 - 1 \right) = 342$$

n=3 için $h = \frac{b-a}{n} = \frac{7-1}{3} = 2$

Sol toplamlar

Sağ toplamlar

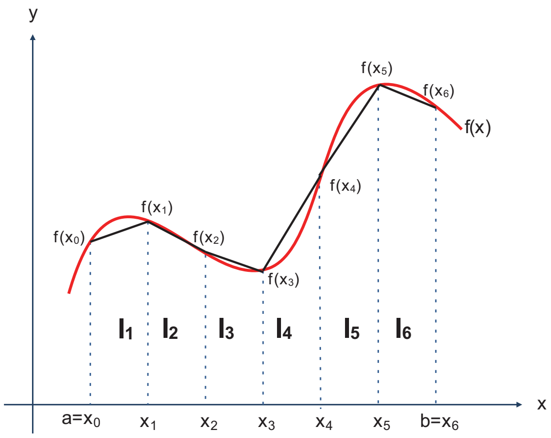
Orta Toplamlar

MATLAB Kodları

```
%sol
clc;
%integral sinirlari
a=1;
b=7;
n=input ('Parca =');
h=(b-a)/n;
fprintf('Adim = %.3f \n', h);

toplam=0;
x=1;
for i=1:n
    y=3*x^2;
    fprintf('%d. alan=%.3f\n', i,y);
    x=a+i*h;
    toplam=toplam+h*y;
end;

fprintf('yaklasik integral = %.3f \n', toplam);

%sag
clc;
%integral sinirlari
a=1;
b=7;
n=input ('Parca =');
h=(b-a)/n;
fprintf('Adim = %.3f \n', h);

x=1;
toplam=0;
for i=1:n
    x=a+i*h;
    y=3*x^2;
    fprintf('%d. alan=%.3f\n', i,y);
    toplam=toplam+h*y;
end;

fprintf('yaklasik integral = %.3f \n', toplam);

%orta
clc;
%integral sinirlari
a=1;
b=7;
n=input ('Parca =');
h=(b-a)/n;
fprintf('Adim = %.3f \n', h);

toplam=0;
x=1;
for i=1:n
    y=3*(x+(h/2))^2;
    fprintf('%d. alan=%.3f\n', i,y);
    x=a+i*h;
    toplam=toplam+h*y;
end;

fprintf('yaklasik integral = %.3f \n', toplam);
```

2. Yamuk Yöntemi

İntegrali bulunacak eğri ilgili aralıkta küçük yamuklara ayrılır, bu yamukların alanları toplanarak yaklaşık sonuç bulunur.



Algoritma;

[a,b] aralığı n eşit parçaya bölünür.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Yamuklar elde edilir.

Herbir yamuğun alanı hesaplanır.

Alanlar toplaranak yaklaşık integral sonucu bulunur.

$$I = \int_a^b f(x)\cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$$

$$I_1 = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$$

$$I_2 = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

$$I_3 = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_2) + f(x_3)\right)$$

$$I_4 = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_3) + f(x_4)\right)$$

$$I_5 = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_4) + f(x_5)\right)$$

$$I_6 = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_5) + f(x_6)\right)$$

$$I = \int_a^b f(x)\cdot dx \cong \frac{h}{2}\cdot\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_5) + f(x_6)\right]$$

$$Genel\,hali \rightarrow I = \int_a^b f(x)\cdot dx \cong \frac{h}{2}\cdot\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Örnek :

$\int_{1}^{7} 3 \cdot x^2 \cdot dx$ integralini yamuk yöntemini kullanarak bulunuz. (n=3,5,10)

Örnek :

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \cdot dx$ integralini yamuk yöntemini kullanarak bulunuz. (n=5,10)

n=5 için $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{5} = 0.20944\ radyan\ \ veya\ 12^o$