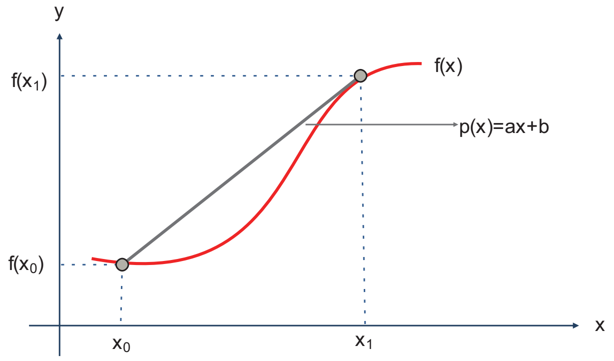
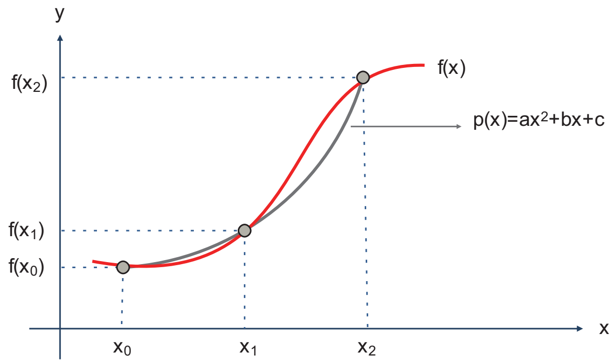
3. Simpson (Paraboller) Yöntemi

Belirli integralin bulunması için en yaygın kullanılan yöntemdir. Bu yöntemde, asıl fonksiyon yerine, bu fonksiyona 2.dereceden bir polinom uydurup, bu polinomla x-ekseni arasında kalan alanın hesabı bulunur.

Eğer uydurulan polinom 1. dereceden ise, yöntem yamuk(trapez) yöntemi olur;



Eğer uydurulan polinom 2. dereceden ise, yöntem simpson(polinomlar) yöntemi olur;



Simpson yönteminde 3 noktadan geçen polinom denklemi kullanılır.

Eğer aralıktaki nokta sayısı artırılırsa, hassasiyet artar, hata azalır.

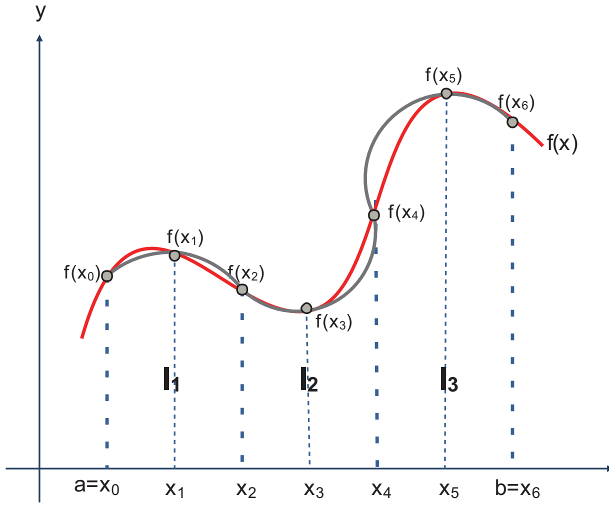
Langrange enterpolasyon formulune göre (Enterpolasyon konusu ayrıca incelenecektir)

x_0, x_1, x_2 noktalarından geçen parabol denklemi;

$$P(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}\cdot f(x_0)+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}\cdot f(x_1)+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}\cdot f(x_2)$$

Bu fonksiyonun $[x_0, x_2]$ sınırlarına göre belirli integrali ise;

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x)\cdot dx=\frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2)\right]$$



Algoritma;

[a,b] aralığı n eşit parçaya bölünür.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

3 noktadan bir 2.dereceden bir eğri geçirilir. Böylece n/2 tane alt bölge oluşur.

Herbir bölgenin alanı hesaplanır.

Alanlar toplanarak yaklaşık integral sonucu bulunur.

$$I = \int_a^b f(x)\cdot dx = I_1 + I_2 + I_3$$

x_0, x_1, x_2 *bölgesi;*

$$I_1 = \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0) + 4\cdot f(x_1) + f(x_2)\right]$$

x_2, x_3, x_4 *bölgesi;*

$$I_2 = \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_2) + 4\cdot f(x_3) + f(x_4)\right]$$

x_4, x_5, x_6 *bölgesi;*

$$I_3 = \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_4) + 4\cdot f(x_5) + f(x_6)\right]$$

$$I = \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0) + f(x_6) + 2\cdot\left(f(x_2) + f(x_4)\right) + 4\cdot\left(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)\right)\right]$$

$$Genel\,hali \rightarrow I = \int_a^b f(x)\cdot dx \cong \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\cdot\sum_{\substack{i=1 \\ i:tek}}^{n-1} f(x_i) + 2\cdot\sum_{\substack{j=2 \\ j:cift}}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Simpson yöntemi (n ε çift sayılar) için kullanılabilir.

Örnek :

$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \cdot dx$ integralini simpson yöntemini kullanarak bulunuz. (n=4)

n=4 için $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{4} = 0.2618\ radyan$

i	x_i	$f(x_i)$

Örnek :

$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ integralini trapez ve simpson yöntemini kullanarak bulunuz. (n=4)

n=4 için $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$

i	x_i	$f(x_i)$

Trapez;

Simpson;

Örnek : Aşağıda, tam dalga kontrollü bir doğrultucunun çıkış dalga geriliminin değişimi verilmiştir. Bu gerilimin ortalama değerini bütün yöntemleri kullanarak bulunuz (n=4).