LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

En az bir tanesi doğrusal olmayan n-denklemden oluşmuş sisteme lineer olmayan denklem sistemi denir.

$$x^2 + x \cdot y = 2 \quad (lineer\ degil)$$
$$x + 4 \cdot y = 5 \quad (lineer)$$

1. İki değişkenli lineer olmayan denklem sisteminin Newton Yöntemi ile çözümü

f(x,y) = 0

g(x,y) = 0

olmak üzere, bu denklemler (x_0 , y_0) noktası için taylor serilerine açılırsa;

> Hatırlatma : f(x) fonksiyonun x_i noktasındaki taylor serisi;
>
> $$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}\cdot(\Delta x)^1 + \frac{f''(x_i)}{2!}\cdot(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}\cdot(\Delta x)^3 + \cdots$$

$$f(x_0+\Delta x\,,\ y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right) + \left(\frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\right)^2 + \cdots$$

$$g(x_0+\Delta x\,,\ y_0+\Delta y) = g(x_0,y_0) + \left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\right) + \left(\frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial y^2}\right)^2 + \cdots$$

Taylor serisinde ilk 2 terim alınır ve (x_1 , y_1) noktasında da fonksiyonlar sıfıra eşitse;

$$0 = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$$

$$0 = g(x_0,y_0) + \left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$$

Δx ve Δy bilinmeyenler olarak seçilip sistem matrisel olarak yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

Bu sistem Ax=B olan lineer bir sistemdir. Sistem, (x_0 , y_0) başlangıç değerleri ile herhangibir yöntem kullanılarak çözülerek ve Δx, Δy ‘in ilk değerleri bulunur. Bu değerler kullanılarak,

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$y_1 = y_0 + \Delta y$

noktaları bulunur. Bu işleme $|\Delta x| < \varepsilon$ ve $|\Delta y| < \varepsilon$ ‘a kadar devam edilir.

İterasyon için sistem;

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x_k, y_k)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x_k, y_k)}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta x \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y \end{aligned}$$

Örnek : Aşağıda verilen denklem sistemini $x_0 = 0.6$ ve $y_0 = 1.5$ başlangıç değerlerini kullanarak çözünüz.

$$x^2 + y = 3$$
$$x + y^2 = 5$$

Örnek : Aşağıda verilen denklem sistemini $x_0 = 0.5$ ve $y_0 = 3$ başlangıç değerlerini kullanarak çözünüz.

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$e^x + 5 \cdot x - y = 0$$

2. Üç değişkenli lineer olmayan denklem sisteminin Newton Yöntemi ile çözümü

f(x,y,z) = 0

g(x,y,z) = 0

v(x,y,z) = 0

olmak üzere, bu denklemler (x_0 , y_0 , z_0) noktası için taylor serilerine açılırsa;

$$f\left(x_0+\Delta x\,,\;y_0+\Delta y,\;z_0+\Delta z\right)=f(x_0,y_0,z_0)+\left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\Delta z}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right)+\cdots$$

$$g\left(x_0+\Delta x\,,\;y_0+\Delta y,\;z_0+\Delta z\right)=g(x_0,y_0,z_0)+\left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\Delta z}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right)+\cdots$$

$$v\left(x_0+\Delta x\,,\;y_0+\Delta y,\;z_0+\Delta z\right)=v(x_0,y_0,z_0)+\left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\Delta z}{1!}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right)+\cdots$$

Taylor serisinde ilk 2 terim alınır ve (x_1 , y_1 , z_1) noktasında da fonksiyonlar sıfıra eşitse;

$$0=f(x_0,y_0,z_0)+\left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\Delta z}{1!}\cdot\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right)$$

$$0=g(x_0,y_0,z_0)+\left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\Delta z}{1!}\cdot\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right)$$

$$0=v(x_0,y_0,z_0)+\left(\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\frac{\Delta y}{1!}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\Delta z}{1!}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right)$$

Δx, Δy ve Δz bilinmeyenler olarak seçilip sistem matrisel olarak yazılırsa;

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\\ \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\\ \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0,z_0)}{\partial z}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}f(x_0,y_0,z_0)\\ g(x_0,y_0,z_0)\\ v(x_0,y_0,z_0)\end{bmatrix}$$

Bu sistem Ax=B olan lineer bir sistemdir. Sistem, (x_0 , y_0, z_0) başlangıç değerleri ile herhangibir yöntem kullanılarak çözülerek ve Δx, Δy ve Δz ‘nin ilk değerleri bulunur. Bu değerler kullanılarak,

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$y_1 = y_0 + \Delta y$

$z_1 = z_0 + \Delta z$

noktaları bulunur. Bu işleme $|\Delta x| < \varepsilon$ ve $|\Delta y| < \varepsilon$ ve $|\Delta z| < \varepsilon$ ‘a kadar devam edilir.

Newton yönteminde yakınsama koşullarını çok iyi olmasına ragmen başlangıç degerleri iyi seçilmezse sonuç alınamaz. Newton yönteminin algoritması basittir .Yöntem teorik olarak kusursuzdur. Pek çok problem için gerçek çözüme yakınsar.

Örnek : Aşağıda verilen denklem sistemini x = 1 , y = 2 ve z=3 başlangıç değerlerini kullanarak çözünüz.

$$x + y + 2 \cdot z = 5$$
$$x \cdot y + y^2 + z = 3$$
$$x^2 + y^2 + 2 \cdot z^3 = 17$$

Örnek : Aşağıda verilen denklem sistemini $x_1^0 = 0.1$, $x_2^0 = 0.1$ ve $x_3^0 = 0.19$ başlangıç değerlerini kullanarak çözünüz.

$$3x_1 - \cos(x_2 \cdot x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81 \cdot (x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 = 0$$

$$e^{-x1 \cdot x2} + 20 \cdot x_3 + 9.472 = 0$$

3. Basit İterasyon Yöntemi

Lineer olmayan bir denklemin kökünü bulmak için kullanılan Basit İterasyon Yöntemi bazı değişikliklerle lineer olmayan denklem sisteminde kullanılır.

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\
&f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0
\end{aligned}
$$

formatında verilen denklem sistemi, alttaki formata dönüştürülür.

$$
\begin{aligned}
&x_1 = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\
&x_2 = g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&x_n = g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0
\end{aligned}
\qquad
G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix}
\qquad
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}
$$

Yeni sistem yakınsama koşulunu sağlıyorsa

$X^{k+1} = G(X^k)$ formülü ile itersayona başlanır.

Yakınsama Koşulu : Lineer olmayan bir denklemin yakınsama koşulu ile aynı yapıdadır;

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\right| \le 1 \\
&\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial g_n}{\partial x_2}\right| \le 1 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\right| \le 1
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{g_j}{x_j}\right] \le 1
$$

Örnek : Aşağıda verilen denklem sistemini basit iterasyon yöntemi kullanarak çözünüz.

($x_1^0 = 3.48$, $x_2^0 = 2.26$)

$$x_1 + 3 \cdot \log_{10} x_1 - x_2^2 = 0$$
$$2 \cdot x_1^2 - x_1 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1 + 1 = 0$$