ENTERPOLASYON

Belirli bir aralıkta, bilinen değerleri [(x_0,y_0) .. (x_n,y_n)] kullanarak, bilinmeyen değerlerin hesaplanmasına ***enterpolasyon*** denir. Bu amaçla, bilinen veriler kullanarak uygun fonksiyonlar uydurulur.

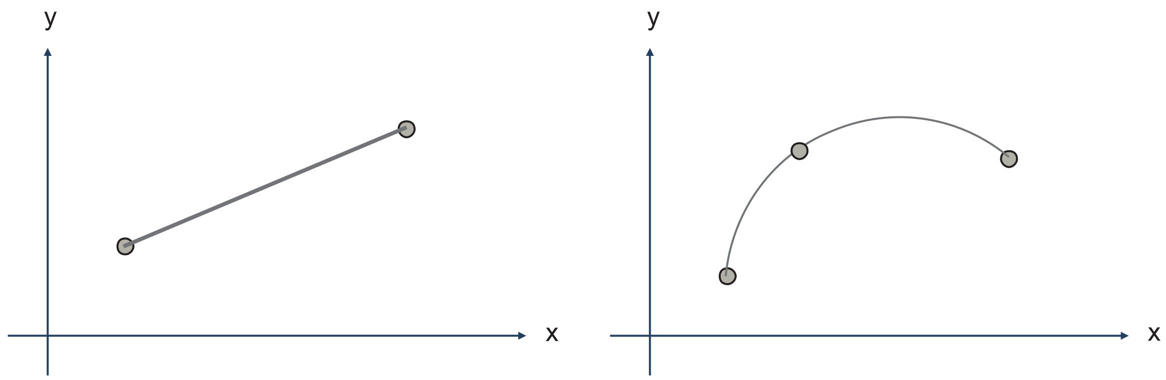
En yaygın olarak polinom enterpolasyonu kullanılır.

n. dereceden polinomun genel hali;

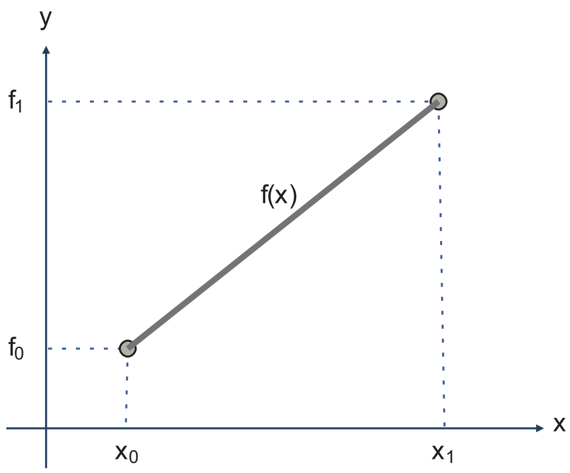
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

(n+1) veri için, bütün noktalardan geçen bir tane n.dereceden polinom bulunur.

2 noktayı 1.dereceden polinom (doğru),
3 noktayı 2. Dereceden polinom (parabol) birleştirir.



Doğrusal Enterpolasyon



(x_o,f_o) ve (x_1,f_1) biliniyorsa, bu 2 noktadan geçen doğrunun denkleminin bulunması doğrusal enterpolasyondur.

Bu 2 noktadan geçen doğrunun denklemi;

f(x)=a_0 + a_1 x

kabul edilerek, katsayıları hesaplanır.

$$(x_0, f_0) \to f_0 = a_0 + a_1 \cdot x_0$$
$$(x_1, f_1) \to f_1 = a_0 + a_1 \cdot x_1$$

bu denklem sistemi çözülerek katsayılar bulunur.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

Cramer yöntemi ile;

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 \\ f_1 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}} = \frac{f_0 \cdot x_1 - f_1 \cdot x_0}{x_1 - x_0}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_0 \\ 1 & f_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

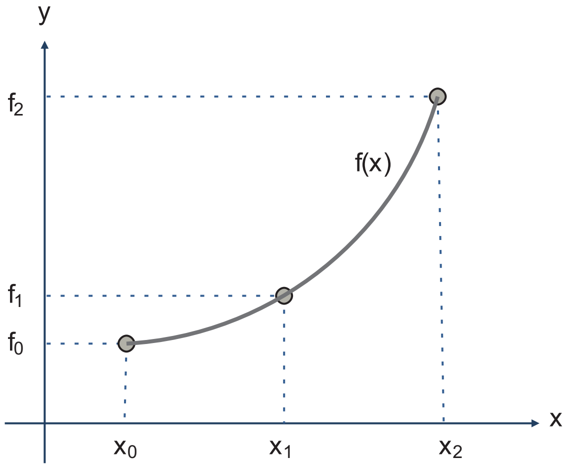
$$\boxed{\begin{aligned} & f(x) = a_0 + a_1 \cdot x \;\to \\ & f(x) = \frac{f_0 \cdot x_1 - f_1 \cdot x_0}{x_1 - x_0} + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \cdot x \end{aligned}}$$

$f(x) = L_0 \cdot f_0 + L_1 \cdot f_1$ şeklinde düzenlenirse;

$$f(x) = \frac{f_0 \cdot x_1 - f_1 \cdot x_0 + f_1 \cdot x - f_0 \cdot x}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \cdot f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f_1$$

$$L_0 = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \;,\quad L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Polinomal Enterpolasyon (Lagrange Enterpolasyonu)



(x_o,f_o) , (x_1,f_1) ve (x_2,f_2) biliniyorsa, bu 3 noktadan geçen parabol denkleminin bulunması;

$f(x)=a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2$

kabul edilerek, katsayıları hesaplanır.

$$\left(x_0,f_0\right)\rightarrow f_0=a_0+a_1\cdot x_0+a_2\cdot x_0^2$$
$$\left(x_1,f_1\right)\rightarrow f_1=a_0+a_1\cdot x_1+a_2\cdot x_1^2$$
$$\left(x_2,f_2\right)\rightarrow f_2=a_0+a_1\cdot x_2+a_2\cdot x_2^2$$

bu denklem sistemi çözülerek katsayılar bulunur.

Denklem sistemi çözülüp $f(x)=L_0\cdot f_0+L_1\cdot f_1+L_2\cdot f_2$ katsayıları bulunursa;

$$L_0=\frac{\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)}{\left(x_0-x_1\right)\cdot\left(x_0-x_2\right)}\quad,\quad L_1=\frac{\left(x-x_0\right)\cdot\left(x-x_2\right)}{\left(x_1-x_0\right)\cdot\left(x_1-x_2\right)}\quad,\quad L_2=\frac{\left(x-x_0\right)\cdot\left(x-x_1\right)}{\left(x_2-x_0\right)\cdot\left(x_2-x_1\right)}$$

Bu katsayılara Lagrange polinomları denir.

Lagrange katsayıları n dereceli polinom için yazılırsa;

$$L_k=\frac{\left(x-x_0\right)\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\cdot\left(x-x_{k-1}\right)\cdot\left(x-x_{k+1}\right)\cdot\cdot\left(x-x_n\right)}{\left(x_k-x_0\right)\cdot\left(x_k-x_1\right)\cdot\cdot\left(x_k-x_{k-1}\right)\cdot\left(x_k-x_{k+1}\right)\cdot\cdot\left(x_k-x_n\right)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

Fonksiyon ise;

$$f(x)=P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}L_k\cdot f_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)\cdot f_k$$

n=1 →(x_o,f_o) ve (x_1,f_1)

$n=2 \rightarrow (x_o,f_o)$, (x_1,f_1) ve (x_2,f_2)

Örnek :

x	y
0	3
1	4
2	7

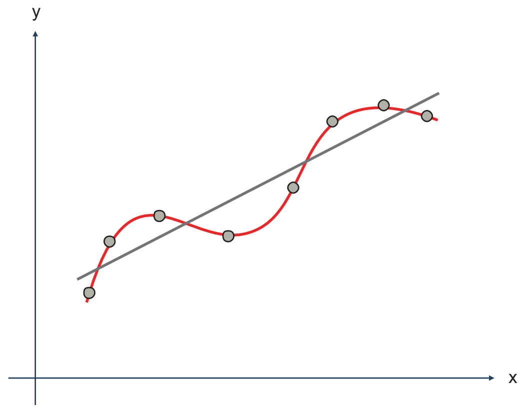
Noktalarından geçen polinomu Lagrange Enterpolasyon formülünü kullanarak bulunuz.

Örnek :

x	y
0	-0.5
1	0
2	0.5
3	1

f(x)=sin(π x) için yandaki noktalarından geçen 3. Dereceden polinomu Lagrange Enterpolasyon formülünü kullanarak bulunuz.

En Küçük Kareler Yöntemi



Deneysel olarak elde edilmiş 8 veri yanda görülmektedir. 7. dereceden bir polinom uydurulursa, bu eğri bütün noktalardan geçer. Ancak verilerdeki değişkenlik nedeniyle, eğri salınımlı olacaktır.

Bu gibi durumlarda, her bir noktadan geçmeyen, verilerin genel eğilimine veya şekline uyan fonksiyon üretilir.

En küçük kareler yöntemi; herbir nokta için, uydurulan eğri ile gerçek fonksiyon arasındaki farkların karelerinin toplamının minimum yapılmasıdır.

Gerçek fonksiyon f(x) ve uydurulan fonksiyon g(x) ise;

$\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)-f(x_i)\right]^2$ ‘nin minimum yapılması ile g(x) fonksiyonunun katsayıları belirlenir.

Hatanın minimum yapılması, fark fonksiyonunun 1.türevinin sıfıra eşitlenmesi ile sağlanır.

1. dereceden polinom uydurulması;

Bilinen n tane (x_i, y_i) noktası için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_0 + a_1\, x$ fonksiyonunun elde edilmesi;

$$e(a_0,a_1)=\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1\cdot x_i-f(x_i)\right]^2$$

Yukardaki e fonksiyonunun minimum olması için 1. türevi sıfıra eşitlenir;

$$\frac{\partial e(a_0,a_1)}{\partial a_i}=0\ ,\ i=0,1 \ \rightarrow \ \frac{\partial e(a_0,a_1)}{\partial a_0}=0 \ \ ve \ \ \frac{\partial e(a_0,a_1)}{\partial a_1}=0$$

$$\frac{\partial e(a_0,a_1)}{\partial a_0}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1\cdot x_i-f(x_i)\right]=0\rightarrow n\cdot a_0+a_1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

$$\frac{\partial e(a_0,a_1)}{\partial a_1}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1\cdot x_i-f(x_i)\right]\cdot x_i=0\rightarrow a_0\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+a_1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot f(x_i)$$

Matrisel olarak ifade edilirse;

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i) \end{bmatrix}$$

Herhangibir yöntemle çözülerek a_0 ve a_1 katsayıları bulunarak;

g(x)=a_0 + a_1 x elde edilir.

Örnek : Aşağıda verilen noktalar için 1. dereceden polinomu (g(x)=a_0 + a_1 x) en küçük kareler yöntemini kullanarak bulunuz.

	x	y			
	0	1			
	1	4			
	2	7			
	4	13			
	7	12			

2. dereceden polinom uydurulması;

Bilinen n tane (x_i, y_i) noktası için en küçük kareler yöntemi kullanılarak
g(x)=a_0 + a_1 x + a_1 x^2 fonksiyonunun elde edilmesi;

$e(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} \left[a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 - f(x_i) \right]^2$ Kısmi türevleri bulunup sıfıra eşitlenerek matrisel olarak ifade edilirse;

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i) \end{bmatrix}$$

Herhangibir yöntemle çözülerek a_0 , a_1 ve a_2 katsayıları bulunarak;

g(x)=a_0 + a_1 x + a_1 x^2 elde edilir.

Örnek : Aşağıda verilen noktalar için 2. dereceden polinomu (g(x)=a_0 + a_1 x + a_1 x^2) en küçük kareler yöntemini kullanarak bulunuz.

	x	y						
	0	-6						
	2	0						
	3	6						
	5	24						
	8	66						

Üstel fonksiyon uydurulması;

Bilinen n tane (x_i, y_i) noktası için en küçük kareler yöntemi kullanılarak $g(x)=a_0\cdot e^{a_1\cdot x}$ fonksiyonunun elde edilmesi için öncelikle bu fonksiyonun doğrusallaştırılması gerekir. Çünkü; a_i ‘lere göre kısmi türev alınıp sıfıra eşitlendiğinde lineer denklem sistemi oluşmaz.

Her iki tarafın ***ln*** ‘i alınırsa;

$$g(x)=y=a_0\cdot e^{a_1\cdot x}\rightarrow \ln(y)=\ln\left(a_0\cdot e^{a_1\cdot x}\right)=\ln\left(a_0\right)+\ln\left(e^{a_1\cdot x}\right)=\ln\left(a_0\right)+a_1\cdot x$$

$$e\left(a_0,a_1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(a_0\right)+a_1\cdot x_i-\ln\left(y_i\right)\right]^2$$

Yukardaki e fonksiyonunun minimum olması için 1. türevi sıfıra eşitlenir;

$$\frac{\partial e\left(a_0,a_1\right)}{\partial a_i}=0\ ,\ i=0{,}1\ \rightarrow\ \frac{\partial e\left(a_0,a_1\right)}{\partial a_0}=0\ \ ve\ \ \frac{\partial e\left(a_0,a_1\right)}{\partial a_1}=0$$

$$\frac{\partial e\left(a_0,a_1\right)}{\partial a_0}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(a_0\right)+a_1\cdot x_i-\ln\left(y_i\right)\right]\cdot\frac{1}{a_0}=0\rightarrow n\cdot\ln\left(a_0\right)+a_1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(y_i\right)$$

$$\frac{\partial e\left(a_0,a_1\right)}{\partial a_1}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(a_0\right)+a_1\cdot x_i-\ln\left(y_i\right)\right]\cdot x_i=0\rightarrow \ln\left(a_0\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+a_1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln\left(y_i\right)$$

Matrisel olarak ifade edilirse;

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\ln\left(a_0\right)\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(y_i\right)\\ \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln\left(y_i\right)\end{bmatrix}$$

Herhangibir yöntemle çözülerek a_0 ve a_1 katsayıları bulunarak;

$g(x)=a_0\cdot e^{a_1\cdot x}$ elde edilir.

Örnek : Aşağıda verilen noktalar için üstel fonksiyonu ($g(x)=a_0\cdot e^{a_1\cdot x}$) en küçük kareler yöntemini kullanarak bulunuz.

	x	y			
	0	3			
	1	8.155			
	2	22.167			
	3	60.257			
	5	445.239			
	8	8942.874			